

2020

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words  
as far as practicable.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

Day - 2

বহু বিকল্পক নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও :

১×১০

(ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর  $S^2 = 6t^2 + 4t + 3$  গতির নিয়মে চলে, যেখানে  $S$  হল সরণ এবং  $t$  হল সময়। তবে কণাটির ত্বরণ নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে সরলভেদে থাকবে?

(অ)  $\frac{1}{S^3}$

(আ)  $\frac{1}{S^2}$

(ই)  $S^2$

(ঈ)  $\frac{1}{S}$

(খ) যদি একটি কণা  $r = a \cos\theta$  বক্রের উপর কেন্দ্রীয় বল দ্বারা চালিত হয়, তবে কণাটি নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে সরলভেদে থাকবে?

(অ)  $\frac{1}{r^5}$

(আ)  $\frac{1}{r^3}$

(ই)  $r^3$

(ঈ)  $r^5$

(গ) C.G.S. পদ্ধতিতে কার্যের পরম একক হল

(অ) ফুট-পাউন্ডাল

(আ) আর্গ

(ই) অশ্বশক্তি

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঘ) 2 কিলোগ্রাম ভরের একটি বস্তুকে 5 মিটার উচ্চতায় তুলতে কার্যের পরিমাণ হল

(অ) 98 জুল

(আ) 95 জুল

(ই) 97 জুল

(ঈ) 96 জুল।

(ঙ) কেন্দ্রীয় বলের অধীনে চলমান কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে ধ্রুবক  $h$ -এর মান হল

(অ)  $h = r \frac{d\theta}{dt}$

(আ)  $h = \frac{d\theta}{dt}$

(ই)  $h = \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dt}$

(ঈ)  $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ ।

(চ) সরল দোলনগতিতে চলমান কোনো বস্তুকণার সমীকরণ  $x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$  হলে, দোলনের পর্যায়কাল হবে

(অ) 9 একক

(আ) 6 একক

(ই) 3 একক

(ঈ) 12 একক।

Please Turn Over

(ছ) কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঘাতের (Impulse) পরিমাপ হল

(অ) ঘাত = গতিশক্তির পরিবর্তন

(আ) ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

(ই) ঘাত = ক্রিয়াশীল বল দ্বারা কার্যের পরিমাণ

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(জ)  $\frac{1}{4}$  পাউন্ড ভরবিশিষ্ট একটি ক্রিকেট বল 15 ফুট/সেকেন্ড গতিতে ধাবমান। বলটি একটি ব্যাটের আঘাতে 40 ফুট/সেকেন্ড

গতিবেগে বিপরীত অভিমুখে ধাবিত হলে ব্যাটের অভিঘাত বল হল

(অ)  $13\frac{3}{4}$  সেকেন্ড পাউন্ডাল

(আ) 13 সেকেন্ড পাউন্ডাল

(ই)  $\frac{3}{4}$  সেকেন্ড পাউন্ডাল

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঝ) একটি কণা  $S = \frac{1}{2}vt$  গতিসূত্র মেনে সরলরেখায় চলে, যেখানে  $v$  কণাটির গতিবেগ। তাহলে ত্বরণ হল

(অ) বেগের সঙ্গে সমানুপাতিক

(আ) বেগের বর্গের সঙ্গে সমানুপাতিক

(ই) বেগের অন্যান্যকের সঙ্গে সমানুপাতিক

(ঈ) ধ্রুবক।

(ঞ) একটি বস্তুকণার চলমান পথের বক্রের সমীকরণ  $r = ae^{\theta}$ , যার কৌণিক বেগ ধ্রুবক। তাহলে অরীয় ত্বরণের মান

(অ)  $r$ -এর সঙ্গে সমানুপাতিক

(আ)  $\theta$ -এর সঙ্গে সমানুপাতিক

(ই) শূন্য নয় এমন ধ্রুবক

(ঈ) শূন্য।

২। যে-কোনো একটি প্রস্নের উত্তর দাও :

৫×১

(ক) সমতলীয় বক্ররেখায় চলমান একটি কণার ত্বরণের স্পর্শক উপাংশ নির্ণয় করো।

(খ)  $M$  ভরবিশিষ্ট কামান থেকে  $m$  ভরবিশিষ্ট গোলা নিক্ষেপের জন্য বিস্ফোরণে  $E$  পরিমাণ গতিশক্তি সৃষ্টি হয়। দেখাও যে

কামানের গোলার প্রারম্ভিক গতিবেগ ছিল  $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$ ।

যে-কোনো পাঁচটি প্রস্নের উত্তর দাও :

১০×৫

৩। (ক) ধ্রুবক ঘাতসম্পন্ন একটি ইঞ্জিন, যা প্রতি সেকেন্ডে  $H$  একক কার্য করে, তা একটি ট্রেনকে টেনে নিয়ে যাচ্ছে। যদি সমগ্র ট্রেনের ভর  $M$  হয় এবং বাধা  $R$ -কে ধ্রুবক বলে ধরা হয়, তবে দেখাও যে স্থিতাবস্থা থেকে  $V$  গতিবেগে উৎপন্ন করতে

$\left( \frac{MH}{R^2} \log \frac{H}{H-RV} - \frac{MV}{R} \right)$  সেকেন্ড সময় লাগবে।

(খ)  $R$  পাউন্ডাল বাধার বিরুদ্ধে  $V$  ফুট/সেকেন্ড গতিতে চলন্ত একটি ট্রেনের ইঞ্জিনের অশ্বশক্তি কত?

৮+২

- ৪। (ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর  $x = a \cos(nt + b)$  গতির নিয়মে চলে। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ কেন্দ্রাভিমুখী এবং দূরত্বের সঙ্গে সরলভেদে আছে।
- (খ) সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণার কেন্দ্রবিন্দু  $O$ -এর সাপেক্ষে পর্যায়কাল (period)  $T$  এবং এটি  $OP$  অভিমুখে  $P$  বিন্দুকে  $V$  গতিবেগে অতিক্রম করে। যদি কণাটি  $P$  বিন্দুতে ফিরে আসতে  $t$  সময় নেয় তাহলে দেখাও যে  $t = \frac{T}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{VT}{2\pi x} \right)$
- এবং  $OP = \frac{VT}{2\pi} \cot \frac{\pi t}{T}$ , যেখানে  $OP = x$ । ২+(৪+৪)
- ৫। (ক) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত করো।
- (খ) বলকেন্দ্র  $O$  থেকে  $x$  দূরত্বে  $\mu x^{-5/3}$  আকর্ষক বলের অধীনে একটি কণা সরলরেখায় গতিশীল। যদি  $O$  বিন্দু থেকে  $a$  দূরত্বে থেকে কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে, তবে দেখাও যে কণাটি  $\frac{2a^{4/3}}{\sqrt{3\mu}}$  সময়ে  $O$  বিন্দুতে পৌঁছাবে। ২+৮
- ৬। (ক) একটি বস্তুকণা  $x^2 = 8y$  অধিবৃত্তাকার পথে এরূপ বলের অধীনে গতিশীল হয়, যা সর্বদাই  $y$  অক্ষের সঙ্গে লম্ব। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো এবং কণাটির গতিপথের যে-কোনো একটি বিন্দুতে তার গতিবেগ নির্ণয় করো।
- (খ) রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্রটি বিবৃত করো। ৮+২
- ৭। (ক)  $m$  ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর  $m\mu(r^{-3} + 8c^2r^{-5})$  পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। কণাটি যদি  $c$  দূরত্বে apse থেকে  $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$  বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে  $r = c \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ ।
- (খ) কেপলারের গ্রহগতির সূত্রগুলি বিবৃত করো। ৮+২
- ৮। (ক) একটি বস্তুকণা একটি মাধ্যমে ছোঁড়া হল। মাধ্যমের বাধা কণার গতিবেগের ঘনের সঙ্গে সমানুপাতিক এবং অন্য কোনো বল কণার উপর কাজ করছে না।  $t$  সময়ে বস্তুকণাটি যদি  $d$  দূরত্ব যায় এবং গতিবেগ যদি  $v_1$  থেকে হ্রাস পেয়ে  $v_2$  হয়, তবে দেখাও যে  $\frac{d}{t} = \frac{2v_1v_2}{(v_1 + v_2)}$ ।
- (খ) শক্তির সংরক্ষণ সূত্রটি বিবৃত করো। ৮+২
- ৯। (ক) একটি কণার প্রতি একক ভরের উপর  $F$  আকর্ষক বলের অধীনে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে বিচরণশীল। ওই কণার কক্ষপথের অবকল সমীকরণ নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করো :
- $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2} \quad | \text{ (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)}$$
- (খ) Apse এবং Apsidal distance-এর সংজ্ঞা দাও। ৮+২

১০।  $m$  ভরবিশিষ্ট কোনো একটি কণা  $\left\{ \mu \div (\text{দূরত্ব})^2 \right\}$  এই কেন্দ্রীয় ত্বরণ দ্বারা গতিশীল। কণাটিকে  $R$  দূরত্ব থেকে  $V$  গতিবেগে উৎক্ষেপণ করা হয়েছে। দেখাও যে, কণাটির গতিপথ একটি সমপরাবৃত্ত (Rectangular hyperbola) হবে যদি প্রক্ষেপ কোণটি হয়

$$\sin^{-1} \left[ \mu \div \left\{ VR \sqrt{\left( V^2 - \frac{2\mu}{R} \right)} \right\} \right] ,$$

১০

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Multiple Choice Questions

1. Answer *all* the questions :

1×10

(a) A particle moves along a straight line according to the law  $S^2 = 6t^2 + 4t + 3$ , where  $S$  is the displacement and  $t$  is the time. Then its acceleration varies as

- (i)  $\frac{1}{S^3}$                       (ii)  $\frac{1}{S^2}$                       (iii)  $S^2$                       (iv)  $\frac{1}{S}$ .

(b) If a particle describes the curve  $r = a \cos\theta$  under a central force to the pole, then the force varies as

- (i)  $\frac{1}{r^5}$                       (ii)  $\frac{1}{r^3}$                       (iii)  $r^3$                       (iv)  $r^5$ .

(c) In C.G.S. system the absolute unit of work is

- (i) Foot-poundal      (ii) Erg                      (iii) Horsepower      (iv) None of these.

(d) The work done in raising a mass of 2kg to a height of 5 meter is

- (i) 98 joules              (ii) 95 joules              (iii) 97 joules              (iv) 96 joules.

(e) For a central orbit, the expression for the constant  $h$  is

- (i)  $h = r \frac{d\theta}{dt}$               (ii)  $h = \frac{d\theta}{dt}$               (iii)  $h = \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dt}$               (iv)  $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ .

(f) For a Simple Harmonic motion  $x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ , the time period is

- (i) 9 unit                      (ii) 6 unit                      (iii) 3 unit                      (iv) 12 unit.

(g) The impulse acting on a body is given by

- (i) Impulse = Change in Kinetic energy      (ii) Impulse = Change in Momentum  
(iii) Impulse = Workdone by acting force      (iv) None of these.

- (h) A cricket ball weighing  $\frac{1}{4}lb$  is moving with a velocity of 15ft/second and is struck by a bat which causes it to travel in the opposite direction with a velocity of 40ft/second. Then the impulsive force of the bat is
- (i)  $13\frac{3}{4}$  sec-pondals                      (ii) 13 sec-poundals
- (iii)  $\frac{3}{4}$  sec-pondals                      (iv) None of these.
- (i) The law of motion of a particle moving in a straight line is  $S = \frac{1}{2}vt$ . Then the acceleration is
- (i) proportional to velocity                      (ii) proportional to square of velocity
- (iii) proportional to inverse of velocity                      (iv) constant.
- [ $v$  is the velocity of the particle]
- (j) A particle describes a curve  $r = ae^{\theta}$  with constant angular velocity. Then the radial acceleration is
- (i) proportional to  $r$                       (ii) proportional to  $\theta$
- (iii) non-zero constant                      (iv) zero.

2. Answer **any one** question :

5×1

- (a) Find the expression for tangential component of velocity of a particle moving in a plane.
- (b) A Cannon ball of mass  $m$  is projected from a Cannon of mass  $M$  by an explosion which generates kinetic energy  $E$ . Prove that the initial velocity of the Cannon ball is  $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$ .

Answer **any five** questions.

10×5

3. (a) An engine works at a constant power  $H$  units of work per second. It pulls a train of total mass  $M$  against a constant resistant  $R$ . Show that the train acquires velocity  $V$  in time  $\left(\frac{MH}{R^2} \log \frac{H}{H-RV} - \frac{MV}{R}\right)$  seconds.
- (b) What is the Horsepower of the engine which keeps a train moving with velocity  $V$  ft/second against a resistance of  $R$  poundals? 8+2
4. (a) A particle moves along a straight live under the law of motion given by  $x = a \cos (nt + b)$ . Show that the acceleration is directed to the origin and varies as the distance.
- (b) A particle is performing a simple harmonic motion of period  $T$  about a centre  $O$  and it passes through a point  $P$  with a velocity  $V$  in the direction  $OP$ . If the particle returns to  $P$  in time  $t$ , then show that  $t = \frac{T}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{VT}{2\pi x} \right)$  and  $OP = \frac{VT}{2\pi} \cot \frac{\pi t}{T}$ , where  $OP = x$ . 2+(4+4)

**Please Turn Over**

5. (a) State Second law of Newton.  
(b) A particle moves in a straight line under the action of an attractive force  $\mu x^{-5/3}$ , when at a distance  $x$  from the centre of force  $O$ . If it starts from rest at a distance 'a' from  $O$ , then show that it will arrive at  $O$  in time  $\frac{2a^{4/3}}{\sqrt{3\mu}}$ . 2+8
6. (a) A particle describes a parabola  $x^2 = 8y$  under a force which is always perpendicular to  $y$ -axis. Find the law of force and the velocity of the particle at any point on its orbit.  
(b) State the principle of conservation of linear momentum. 8+2
7. (a) A particle of mass  $m$  moves under a central attractive force  $m\mu(r^{-3} + 8c^2r^{-5})$  and is projected from an apse at a distance  $c$  with velocity  $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$ . Prove that the equation of the orbit is  $r = c \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ .  
(b) Write Kepler's laws on planetary motion. 8+2
8. (a) A particle is projected in a medium whose resistance is proportional to the cube of the velocity and no other force acts on the particle. While the velocity diminishes from  $v_1$  to  $v_2$ , the particle traverses a distance  $d$  in time  $t$ . Show that  $\frac{d}{t} = \frac{2v_1v_2}{(v_1 + v_2)}$ .  
(b) State the principle of conservation of energy. 8+2
9. (a) Establish the differential equation of the path for the motion of a particle moving in a central orbit under an attractive force  $F$  per unit mass, in the form  $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$  (symbols have their usual meanings).  
(b) Define apse and apsidal distances. 8+2
10. A particle of mass  $m$  is moving with central acceleration  $\left\{ \mu \div (\text{distance})^2 \right\}$ . It is projected with a velocity  $V$  at a distance  $R$ . Show that its path is a rectangular hyperbola if the angle of projection is  $\sin^{-1} \left[ \mu \div \left\{ VR \sqrt{\left( V^2 - \frac{2\mu}{R} \right)} \right\} \right]$ . 10
-